Cevap Anahtarı

1) a) $113x \equiv 7 \pmod{5612}$ kongrüansı için

$(113, 5612) = 1 \mid 7$ olduğundan kongrüansın çözümü vardır ve tektir

Öklid algoritması yoluyla çözelim

$5612 = 49 \cdot 113 + 75$

$113 = 1 \cdot 75 + 38$

$75 = 1 \cdot 38 + 37$

$38 = 1 \cdot 37 + 1$

$1 = 38 - 1 \cdot 37$

$1 = 38 - 1 \cdot (75 - 38)$

$1 = 2 \cdot 38 - 1 \cdot 75$

$1 = 2 \cdot (113 - 1 \cdot 75) - 1 \cdot 75$

$1 = 2 \cdot 113 - 3 \cdot 75$

$1 = 2 \cdot 113 - 3 \cdot (5612 - 49 \cdot 113)$

$1 = 149 \cdot 113 - 3 \cdot 5612$

Ayrıca $113x \equiv 7 \pmod{5612} \Rightarrow 113x - 5612y = 7$ yazılır. O halde eşitliğin iki tarafı 7 ile çarpılırsa

$1 = 149 \cdot 113 - 3 \cdot 5612$

$7 = 149 \cdot 7 \cdot 113 - 3 \cdot 7 \cdot 5612$

$7 = \underbrace{1043}_{x} \cdot 113 - 21 \cdot 5612$

$x \equiv 1043 \pmod{5612}$ bulunur.

b) 81^{8181} sayısının 43 ile bölümünden elde edilen kalanı bulalım.

$81^{8181} \equiv 38^{8181} \equiv x \pmod{43}$ için x'i bulalım

Euler Teo. göre $38^{\varphi(43)} \equiv 1 \pmod{43}$

$38^{42} \equiv 1 \pmod{43} \Rightarrow 38^{8181} = (38^{42})^{194} \cdot 38^{33}$

$= 38^{33} \pmod{43}$

CamScanner ile tarandı

$38^{33} \equiv x \pmod{43}$

$(-5)^{33} \equiv x \pmod{43}$

$((-5)^3)^{11} \equiv x \pmod{43}$

$\boxed{4^{11} \equiv x \pmod{43}}$

$4^2 \equiv 16$
$4^3 \equiv 21$
$4^4 \equiv 41 \Rightarrow$
$4^4 \equiv -2$

Her iki taraf 4 ile çarpılırsa

$4^{12} \equiv 4x \pmod{43}$

$\Rightarrow (-2)^3 \equiv 4x \pmod{43}$

$\Rightarrow -8 \equiv 4x \pmod{43}$

$\Rightarrow x \equiv -2 \ (43) \Rightarrow \boxed{x \equiv 41}$

$(-5)^2 \equiv 25$
$(-5)^3 \equiv 4$
$(-5)^4 \equiv 23$
$(-5)^5 \equiv 14$
$(-5)^6 \equiv 16$

Ya da / II. Yol

$4^{11} \equiv x \pmod{43} \Rightarrow 4^2 \equiv 16 \pmod{43}$

$4^7 \cdot 4^4 \equiv x \pmod{43}$ $\quad 4^3 \equiv 21$ "

$1 \cdot 41 \equiv x \pmod{3}$ $\quad 4^4 \equiv 41$ "

$4^5 \equiv 35$ "

$4^6 \equiv 11$ "

$\boxed{4^7 \equiv 1}$

2) $(G, *)$ cebirsel yapısı için

Birleşme özelliği: $\forall (a,b), (c,d), (e,f) \in G$ için

$((a,b) * (c,d)) * (e,f) = (ac, b+d) * (e,f)$

$= ((ac).e, (b+d)+f)$

$= (a(ce), b+(d+f))$

$= (a,b) * (ce, d+f)$

$= (a,b) * ((c,d) * (e,f))$

olup sağlanır.

CamScanner ile tarandı

Birim eleman : $\forall (a,b) \in G$ için

$(a,b) * (e_1,e_2) = (a,b)$ o.ş. $(e_1,e_2) \in G$ var mıdır?

$\Rightarrow (a.e_1, b+e_2) = (a,b)$

$\Rightarrow e_1 = 1$, $e_2 = 0$ ve $(1,0) \in G$ aynı zamanda

$(e_1,e_2) * (a,b) = (a,b)$ o.ş. $(e_1,e_2) \in G$ var mıdır?

Yine $(e_1,e_2) = (1,0) \in G$ bulunur

$e = (1,0)$ dır.

Ters eleman : $\forall (a,b) \in G$ için

$(a,b) * (a,b)^{-1} = (e_1,e_2)$ o.ş. $(a,b)^{-1} \in G$ var mıdır?

$(a,b) * (c,d) = (e_1,e_2)$ denilirse

$\Rightarrow (ac, b+d) = (1,0)$

$\Rightarrow (c,d) = \left(\frac{1}{a}, -b\right) = (a,b)^{-1}$. Benzer şekilde

$(a,b)^{-1} * (a,b) = (e_1,e_2)$ o.ş. $(a,b)^{-1} \in G$ var mıdır?

Yine $(a,b)^{-1} = (c,d) = \left(\frac{1}{a}, -b\right)$ bulunur

O halde $(G,*)$ bir gruptur

Şimdi de G de mertebesi 2 olan tek bir elemanın var olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $o((a,b)) = 2$

$(a,b)^2 = (a,b) * (a,b) = e \Rightarrow (a^2, b+b) = (1,0)$

$\Rightarrow a^2 = 1$, $2b = 0$

$\Rightarrow a = \pm 1$, $b = 0$

$\Rightarrow (a,b) = (1,0)$ ya da

$(a,b) = (-1,0)$ dır

$(1,0)$ birim eleman old. onun mertebesi 1 dir

$(-1,0) \in G$ 'nin mertebesi 2 dir Mertebesi 2 olan sadece bu elemandır.

CamScanner ile tarandı

Benzer şekilde kabul edelim ki $o((a,b))=3$ olsun

$((a,b))^3 = (a,b)^2 * (a,b) = e$

$= (a^2, 2b) * (a,b) = e \Rightarrow (a^3, 3b) = (1,0)$

$\Rightarrow (a,b) = (1,0)$

olur Çelişki. $(1,0)$ birim elemanın mertebesi 1 dir.
O halde G de mertebesi 3 olan eleman yoktur.

3) a) $ab^4a = b^7$

$\Rightarrow (ab^4a)^7 = b^{49}$

$\Rightarrow (ab^4a).(ab^4a)\dots(ab^4a) = b^{49}$

$\Rightarrow ab^4a^2b^4a^2\dots a^2b^4a = b^{49}$

$\Rightarrow ab^{28}a = b^{49}$

$\Rightarrow a(b^7)^4a = b^{49}$

$\Rightarrow a(ab^4a)^4a = b^{49}$

$\Rightarrow a(ab^{16}a)a = b^{49}$

$\Rightarrow a^2b^{16}a^2 = b^{49}$

$\Rightarrow b^{16} = b^{49} \Rightarrow b^{33} = e$

$\Rightarrow$

b) $2/3x + 5y \equiv 17 \pmod{18}$

$3/2x + 7y \equiv 29 \pmod{18}$

$6x + 10y = 16 \pmod{18}$

$-\ 6x + 3y = 15 \pmod{18}$

$7y \equiv 1 \pmod{18}$

$\boxed{y \equiv 13}$

Denkliklerden birinde y yerine 13 konulursa.

$3x + 65 \equiv 17 \pmod{18}$

$\Rightarrow 3x \equiv 6 \ (18)$

$\Rightarrow x \equiv 2 \ (6) \quad x \equiv 2, 8, 14$

$C_1K = \{(2,13), (8,13), (14,13)\}$

CamScanner ile tarandı

4) a) $\alpha = (125)(384)$

$\beta = (273)(152)(384) = (1573842)$

$\alpha \cdot \beta = (34578)$ bulunur

$o(\alpha) = 3$, $o(\beta) = 7$, $o(\alpha\cdot\beta) = 5$

$\alpha\beta\alpha^{-1} = (\alpha(1)\alpha(5)\alpha(7)\alpha(3)\alpha(8)\alpha(4)\alpha(2))$

$= (2\ 1\ 7\ 8\ 4\ 3\ 5)$

b) $M(\alpha) = \{\gamma \in S_8 \mid \gamma\alpha\gamma^{-1} = \alpha\}$

$\gamma\alpha\gamma^{-1} = (\gamma(1)\gamma(2)\gamma(5))(\gamma(3)\gamma(8)\gamma(4)) = (125)(384)$

$= (125)(843)$

$= (125)(438)$

$= (251)(384)$

$= (512)(384)$

$= (251)(843)$

$= (251)(438)$

$= (512)(843)$

$= (512)(438)$

$= (384)(125)$

$= (843)(125)$

$= (438)(125)$

$= (384)(251)$

$= (384)(512)$

$= (843)(251)$

$= (438)(251)$

$= (843)(512)$

$= (438)(512)$

9

9

18 tane eleman

yer değiştirerek

0 halde

$M(\gamma) = \{$ 1. I, 2. (384), 3. (348), 4. (125), 5. (152), 6. $(125)(384)$, 7. $(125)(348)$, 8. $(152)(384)$, 9. $(152)(348)$, 10. $(13)(28)(54)$, 11. (182453), 12. (145823), 13. (132854), 14. (135428), 15. (185324), 16. $(14)(23)(58)$, 17. $(18)(24)(53)$, 18. $(142358)\}$

CamScanner ile tarandı

5) a) $\mathbb{Z}_{21}^{*} = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 17, 19, 20\}$

$\odot$	1	2	4	5	8	10	11	13	16	17	19	20
1	1	2	4	5	8	10	11	13	16	17	19	20
2	2	4	8	10	16	20	1	5	11	13	17	19
4	4	8	16	20	11	19	22	10	1	5	13	17
5	5	10	20	4	19	8	13	2	17	1	11	16
8	8	16	11	19	1	17	4	20	2	10	5	13
10	10	20	19	8	17	16	5	4	13	2	1	11
11	11	1	2	13	4	5	16	17	8	19	20	10
13	13	5	10	2	20	4	17	1	19	11	16	8
16	16	11	1	17	2	13	8	19	4	20	10	5
17	17	13	5	1	10	2	19	11	20	16	8	4
19	19	17	13	11	5	1	20	16	10	8	4	2
20	20	19	17	16	13	11	10	8	5	4	2	1

b) $o(\bar{5}) = 6$ öğünlü

$\bar{5}^1 = 5$
$\bar{5}^2 = 4$
$\bar{5}^3 = 20$
$\bar{5}^4 = 16$
$\bar{5}^5 = 17$
$\bar{5}^6 = 1$

$$o(\bar{4}^3) = \frac{o(\bar{4})}{(o(\bar{4}), 3)} = \frac{3}{(3,3)} = \frac{3}{3} = 1$$

CamScanner ile tarandı